



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2Θ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Ιανουαρίου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Απόδειξη επιμεριστικής ιδιότητας στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, σχολικό βιβλίο σελίδα 43.
- A2. Ορισμός εσωτερικού γινομένου, σχολικό βιβλίο σελ. 41. (Δεν ζητείται ο ορισμός στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον διάνυσμα είναι μηδενικό).
- A3. α) Λάθος
β) Αφού $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|^2$ πραγματικοί αριθμοί με $|\vec{\alpha}|^2 \neq 0$, το κλάσμα

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$$

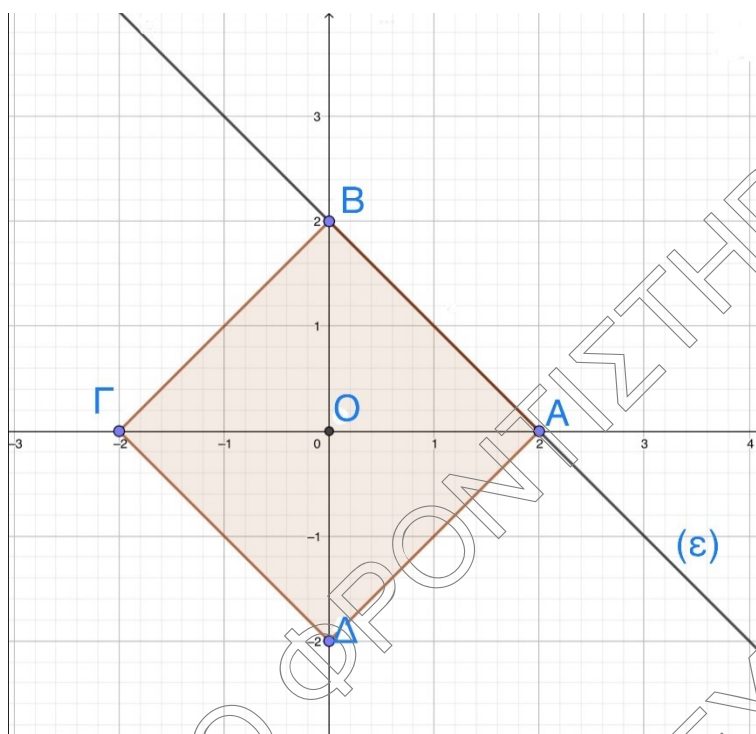
είναι πραγματικός αριθμός, άρα το γινόμενο

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}$$

είναι διάνυσμα.

- A4. 1. Λάθος
2. Λάθος
3. Σωστό
4. Λάθος
5. Λάθος

ΘΕΜΑ Β



B1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 2} = -1$$

και αφού η (ε) διέρχεται από το $A(2,0)$

έχουμε $y - 0 = -1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2$ (ε).

B2. Το $O(0,0)$ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου άρα μέσο της διαγωνίου ΒΔ, οπότε αν $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ θα ισχύουν:

$$x_O = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{0 + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 0$$

$$y_O = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow 0 = \frac{2 + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = -2$$

Άρα $\Delta(0, -2)$.

Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο της πλευράς AD θα ισχύουν

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

οπότε $M(1, -1)$.

Ο συντελεστής της AD είναι

$$\lambda_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 2} = 1$$

οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της μεσοκαθέτου θα ισχύει:
 $\lambda \cdot \lambda_{AD} = -1$

άρα $\lambda = -1$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου αφού διέρχεται από το $M(1, -1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -1$ θα είναι:

$$y - (-1) = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x$$

που είναι η διχοτόμος 2^{ης}, 4^{ης} γωνίας των αξόνων.

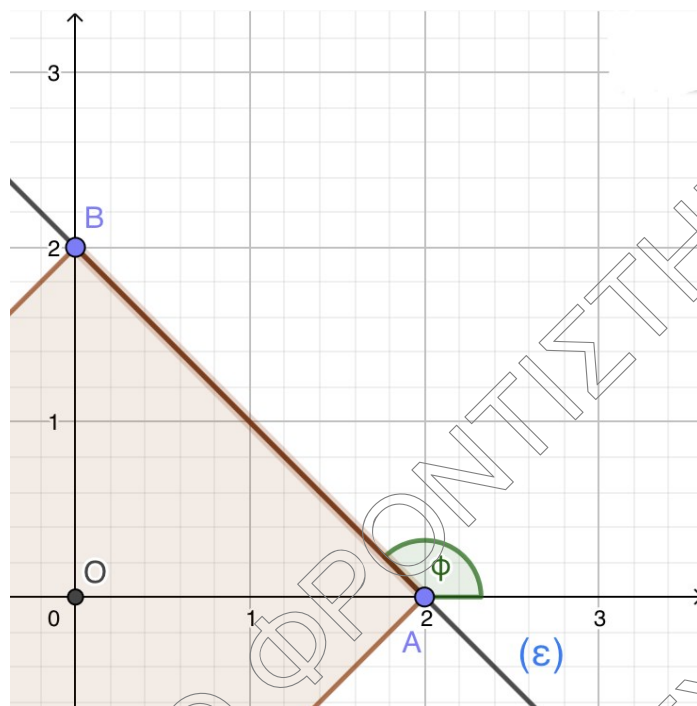
- B3.** Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η πλευρά $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς την ευθεία της πλευράς AD άρα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε $\lambda = \lambda_{AD} = 1$ και αφού διέρχεται από το $B(0, 2)$ θα έχει εξίσωση

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x + 2$$

Το μέτρο $|\overrightarrow{B\Gamma}|$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς του τετραγώνου άρα

$$|\overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

B4.



Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_{AB} = -1$ άρα $\varepsilon\varphi\varphi = -1$ και αφού $0^\circ \leq \varphi < 180^\circ$ θα έχουμε $\varphi = 135^\circ$.

i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ γιατί $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

ii. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{DA}$ είναι αντίρροπα οπότε η γωνία που σχηματίζουν είναι 180° άρα $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DA} = |\overrightarrow{BG}| \cdot |\overrightarrow{DA}| \cdot \cos 180^\circ =$
 $= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (-1) = -8$

iii. Αφού $\overrightarrow{AM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AG}$ έχουμε ότι $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \varphi = 135^\circ$ με $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos \varphi = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2Θ(α)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι: $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & x \\ -4x & -x-1 \end{vmatrix} = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(-x-1) - x(-4x) = 0 \Leftrightarrow -(x+1)^2 + 4x^2 \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4x^2$
 $= 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$$

Άρα

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} \frac{2+4}{6} = 1 \\ \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

(1)

Ακόμη

$$\vec{\beta} \perp \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0 \Leftrightarrow (-4x) \cdot x + (-x-1) \cdot (-2x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } -x+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \quad (2)$$

Από (1) και (2) η κοινή τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο σχέσεις $\vec{a} // \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\gamma}$ είναι η $x = 1$

Γ2. Για $x = 1$ έχουμε $\vec{\beta} = (-4, -2)$ και $\vec{\gamma} = (1, -2)$.

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε

$$\begin{aligned} \vec{\delta} = \kappa \cdot \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma} &\Leftrightarrow (-3, 1) = \kappa(-4, -2) + \lambda(1, -2) \Leftrightarrow \\ (-3, 1) &= (-4\kappa, -2\kappa) + (\lambda, -2\lambda) \Leftrightarrow (-3, 1) = (-4\kappa + \lambda, -2\kappa - 2\lambda) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4\kappa + \lambda = -3 \\ -2\kappa - 2\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\kappa + 2\lambda = -6 \\ -2\kappa - 2\lambda = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις παίρνουμε

$$-10\kappa = -5 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-5}{-10} \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{2}$$

Με αντικατάσταση του κ παίρνουμε

$$-4\kappa + \lambda = -3 \Leftrightarrow -4 \cdot \frac{1}{2} + \lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -3 + 2 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

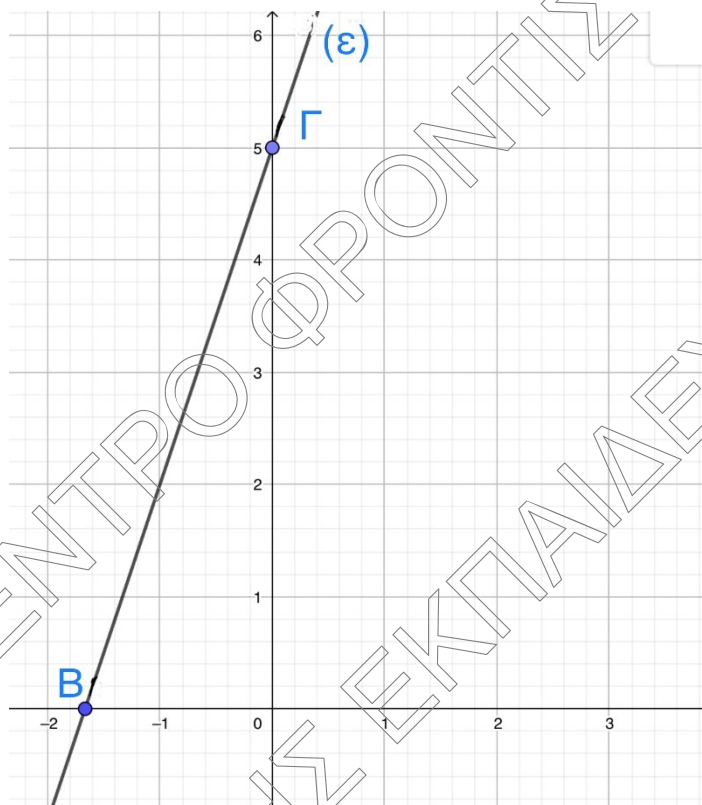
$$\text{Άρα } \vec{\delta} = \frac{1}{2}\vec{\beta} - \vec{\gamma}$$

- Γ3. Ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\delta}$ είναι $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{-3}$ οπότε ο συντελεστής της ευθείας (ε) ως κάθετης στο $\vec{\delta}$ θα είναι $\lambda_{\varepsilon} = 3$.

Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από το $A(-1,2)$ θα έχω

$$y - 2 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 3 + 2 \Leftrightarrow y = 3x + 5$$

Γ4.



Βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας (ε) με τους άξονες.

Με τον $x'x$: θέτουμε $y = 0$ οπότε $x = -\frac{5}{3}$. Άρα $B(-\frac{5}{3}, 0)$

Με τον $y'y$: θέτουμε $x = 0$ οπότε $y = 5$. Άρα $\Gamma(0,5)$.

Το τρίγωνο $O\hat{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο O οπότε

$$E = \frac{1}{2} \cdot \text{βάση} \cdot \text{ύψος} = \frac{1}{2} (OB)(O\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) \cdot 5 = \frac{25}{6} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Αφού $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\vec{a} \cdot \vec{\beta})^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{\beta} - 3 = 0$ θεωρείται τριώνυμο με άγνωστο το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

Έτσι $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$ και

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta}_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Αφού η γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$ είναι αμβλεία η λύση $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1 > 0$ απορρίπτεται γιατί δηλώνει $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) > 0$ ενώ πρέπει $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) < 0$.

Άρα $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -3$.

Δ2.

Αφού $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -3$ το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ γράφεται $\overrightarrow{A\Gamma} = -3 \cdot \vec{a} + \vec{\beta}$.

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ έχουμε :

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = -3\vec{a} + \vec{\beta} - (\vec{a} - \vec{\beta}) = -4\vec{a} + 2\vec{\beta}$$

Για το διάνυσμα $\overrightarrow{BM}$ της διαμέσου της ΑΓ ισχύει

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma}}{2} = \frac{-(\vec{a} - \vec{\beta}) + (-4\vec{a} + 2\vec{\beta})}{2} = \frac{-\vec{a} + \vec{\beta} - 4\vec{a} + 2\vec{\beta}}{2} \\ &= \frac{-5\vec{a} + 3\vec{\beta}}{2} \end{aligned}$$

Για το μέτρο

$$\left| \frac{-5\vec{a} + 3\vec{\beta}}{2} \right|$$

θα υπολογίσουμε το

$$\left| \frac{-5\vec{a} + 3\vec{\beta}}{2} \right|^2 = \left(\frac{-5\vec{a} + 3\vec{\beta}}{2} \right)^2 = \frac{25\vec{a}^2 - 30\vec{a}\vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2}{4} =$$

$$\frac{25|\vec{a}|^2 - 30 \cdot \vec{a}\vec{\beta} + 9|\vec{\beta}|^2}{4} = \frac{25 \cdot 2^2 - 30 \cdot (-3) + 9 \cdot 3^2}{4} = \frac{271}{4}$$

Άρα

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022

Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(α)

$$|\overrightarrow{BM}| = \left| \frac{-5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{2} \right| = \sqrt{\frac{271}{4}} = \frac{\sqrt{271}}{2}$$

Δ3. Έχουμε $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \sqrt{7} \cdot \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot \vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \Rightarrow$

$$|\sqrt{7} \cdot \vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| \Leftrightarrow \sqrt{7} \cdot |\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|$$

και επειδή τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά, ισοδύναμα παίρνουμε:

$$(\sqrt{7} \cdot |\vec{\gamma}|)^2 = |\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow 7 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow 7 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = 2^2 + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 3^2$$

$$\Leftrightarrow 7 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = 4 - 12 + 36 \Leftrightarrow 7 \cdot |\vec{\gamma}|^2 = 28 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}|^2 = 4$$

Και επειδή $|\vec{\gamma}| \geq 0$ έχω $|\vec{\gamma}| = 2$.

Δ4. Έχουμε $\vec{\gamma}^2 = |\vec{\gamma}|^2 = 4$ και

$$[\vec{\alpha}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})] \cdot \vec{\alpha} = (\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha}\vec{\beta}) \cdot \vec{\alpha} = (4 - (-3)) \cdot \vec{\alpha} = 7\vec{\alpha}$$

Επίσης $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \cdot \vec{\beta} = |-3| \cdot \vec{\beta} = 3\vec{\beta}$ άρα το διάνυσμα $\vec{x}$ γράφεται

$$\vec{x} = 4\vec{\beta} - 7\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = -7\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

$$\text{Έτσι } \overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + (-7\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -6\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\beta} = -6\vec{\alpha}$$

Άρα $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) // \vec{\alpha}$ και επειδή $-6 < 0$ έχω $(\overrightarrow{AB} + \vec{x}) \uparrow \downarrow \vec{\alpha}$.